ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS 1975

OPTION : M'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

I - Le plan affine euclidien orienté est rapporté à un repère orthonormé direct xOy. I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Pour $t \in I$, soit Γ_t le cercle qui a pour rayon $r(t)$ et pour centre le point C_t de coordonnées $a(t)$, $b(t)$: a, b, r sont des fonctions réelles données, définies et continûment dérivables sur I ; on suppose que, pour tout $t \in I$, on a $r(t) > 0$.

On définit un point M_t sur Γ_t par une mesure $\varphi(t)$ de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{C_t M_t})$, φ étant une fonction continûment dérivable sur I. On note V_t le vecteur dérivée de la fonction vectorielle $t \to \overrightarrow{OM_t}$ pour la valeur t de la variable.

1°/ Montrer que pour que le vecteur V_t soit pour tout $t \in I$ parallèle à $\overrightarrow{C_t M_t}$ (ou soit nul), il faut et il suffit que φ soit solution d'une équation différentielle (E) de la forme $\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi, t)$, que l'on écrira.

Les courbes décrites par le point M_t lorsque φ est solution de (E) seront appelées courbes associées à la famille (Γ_t).

2°/ On suppose dans cette question que $b = 0$ (les cercles Γ_t sont centrés sur Ox) et que : $I =]0 + \infty[$, $a(t) = t$, $r(t) = \alpha t^m$, α et m étant des constantes strictement positives données.

Quelles sont les solutions constantes de (E) ?

Trouver les solutions non constantes en prenant comme fonction inconnue la fonction $u : t \to u(t) = \operatorname{tg} \frac{\varphi(t)}{2}$.

$u(t)$ a-t-il une limite lorsque $t \to +\infty$ ou lorsque $t \to 0$? (On examinera les cas $m > 1$, $m = 1$, $m < 1$).

Etudier, pour les courbes associées à la famille (Γ_t), les branches obtenues lorsque $t \to +\infty$.

3°/ *a*) : On suppose maintenant que $b = 0$ et que $r = \frac{da}{dt}$, et on se limite aux solutions φ de (E) pour lesquelles $\varphi(t) \in]0, \pi[$.

Que devient l'équation (E) si on prend comme inconnue la fonction $v : t \to v(t) = \text{Log tg } \frac{\varphi(t)}{2}$?

Former les équations paramétriques des courbes associées à la famille (Γ_t).

b) : Lorsque $b = 0$, et que la relation $r = \frac{da}{dt}$ n'est pas satisfaite, mais que $\frac{da}{dt}$ ne s'annule pas, montrer qu'on peut, en remplaçant t par un nouveau paramètre, se ramener au cas examiné en *a*).

4°/ Dans cette quatrième question, on suppose que les cercles Γ_t passent tous par l'origine, et que t est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OC_t})$. La famille (Γ_t) est donc définie par la fonction r.

Former l'équation (E) relative à cette famille.

Prendre dans cette équation pour nouvelle fonction inconnue la fonction $w : t \to w(t) = \text{tg } \frac{\varphi(t) - t}{2}$. Intégrer l'équation obtenue. Trouve-t-on ainsi toutes les solutions de (E) ?

Traiter le cas où $I = \mathbb{R}$ et où la fonction r est constante. Comment les différentes courbes associées à la famille (Γ_t) se déduisent-elles les unes des autres ? En faire une étude sommaire (il sera commode d'utiliser des coordonnées polaires).

5°/ On revient au cas général.

a) On considère deux familles (Γ_t^1) et (Γ_t^2) définies respectivement par les fonctions a_1, b_1, r_1 et a_2, b_2, r_2, I étant le même pour les deux familles.

A quelle condition les équations (E) correspondant à (Γ_t^1) et (Γ_t^2) sont-elles les mêmes ?

Lorsqu'il en est ainsi les deux familles sont dites similaires.

b) (Γ_t^1) étant donnée, peut-on trouver une famille similaire (Γ_t^2) pour laquelle le centre C_t^2 de Γ_t^2 décrit un cercle donné de centre O ? Dans quel cas cette famille (Γ_t^2) est-elle formée de cercles passant par O.

I - L'espace affine euclidien orienté de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé direct $Oxyz$. L'étude demandée concerne des courbes tracées sur des morceaux de surfaces : on suppose vérifiées, sans les expliciter dans l'énoncé, toutes les hypothèses de régularité nécessaires, et on exclut les cas particuliers où les résultats généraux peuvent se trouver en défaut.

1°/ Soit S un morceau de surface, qu'on suppose défini ici par une équation $z = f(x, y)$. On pose : $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = q$.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe de S le long de laquelle $z - px - qy$ a une valeur constante.

Quelle propriété des plans tangente à S le long de $\mathcal{C}$ est exprimée par cette condition ?

Montrer que, en chaque point P de $\mathcal{C}$, la direction conjuguée de la tangente à $\mathcal{C}$ par rapport aux directions asymptotiques est celle de la tangente à S située dans le plan contenant P et Oz.

2°/ On considère, dans le plan zOx, une famille (Γ_t) de cercles centrés sur Oz. Les notations sont analogues à celles de la partie I, mais Oz et Ox jouent respectivement ici le rôle de Ox et Oy.

Les courbes associées à la famille (Γ_t) dépendent d'une constante arbitraire (constante d'intégration de (E)). On note Γ'_K celle qui correspond à la valeur K de la constante, et qui est décrite par le point $M_{t,K}$. Soient $P_{t,K,\theta}$ le point déduit de $M_{t,K}$ et $\Gamma''_{K,\theta}$ la courbe déduite de Γ'_K par rotation d'un angle de mesure θ autour de Oz. Soit enfin S un morceau de surface engendré par une famille à un paramètre de courbe $\Gamma''_{K,\theta}$ de façon suivante : on prend $K = g(\theta)$, où g est une fonction arbitraire ; la famille à un paramètre est la famille $(\Gamma''_{g(\theta),\theta})$; S est défini par l'application $(t, \theta) \to P_{t,\, g(\theta),\theta}$.

Montrer, sans calcul, que les deux familles de lignes de courbure de S sont constituées par les courbes $t = C^{te}$ et les courbes $\theta = C^{te}$.

3°/ Inversement, comment obtient-on les surfaces dont une famille de lignes de courbure est formée des sections par les plans qui passent par une droite fixe ?

4°/ En utilisant les résultats de la question I, 3°/ , donner une représentation paramétrique de ces surfaces.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail